Préparer ma rentrée en Terminale

Option Maths complémentaires

CORRECTION

Eté 2020

Les bases

1 Calcul numérique

Prérequis

✏ Règles de calculs sur les fractions et les puissances.

✏ Racine carrée d'un nombre réel positif et règles de calculs.

Exercice n° 1

1. $A = \dfrac{3^{27} - 3^{29}}{3^{28}}$

$A = \dfrac{3^{27}\left(1 - 3^2\right)}{3^{27} \times 3}$

$A = \dfrac{1-9}{3}$

$A = -\dfrac{8}{3}$

2. $B = \dfrac{3^{-6} \times 5^5}{(5^2)^3 \times 3^{-5}}$.

$B = 3^{-6} \times 3^5 \times 5^5 \times 5^{-6}$.

$B = 3^{-1} \times 5^{-1}$.

$B = \dfrac{1}{15}$

Exercice n° 2

1. $C = \sqrt{48}$

$C = \sqrt{4^2 \times 3}$

$C = 4\sqrt{3}$

2. $D = \sqrt{36+64}$

$D = \sqrt{100}$

$D = 10$

3. $E = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$

$E = 5\sqrt{3^2 \times 3} - 3\sqrt{4^2 \times 3}$

$E = 5 \times 3\sqrt{3} - 3 \times 4\sqrt{3}$

$E = 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3}$

$E = 3\sqrt{3}$

Exercice n° 3

1. $H = \dfrac{-2}{\sqrt{7}-2}$

$H = \dfrac{-2}{\sqrt{7}-2} \times \dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$

$H = \dfrac{-2\sqrt{7}-4}{\sqrt{7}^2 - 2^2}$

$H = \dfrac{-2\sqrt{7}-4}{3}$

2. $I = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

$I = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \times \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$I = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{3^2 - \sqrt{5}^2}$

$I = \dfrac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{4}$

$I = \dfrac{8+4\sqrt{5}}{4}$

$I = 2+\sqrt{5}$

Exercice n° 4

1. $A = -2 \times (5)^{n+1} + 2 \times (5)^n$

$A = 2 \times (5)^n(-5+1)$

$A - 8 \times 5^n$

2. $B = (n+1) \times 2^{n+1} - n \times 2^n$

$B = 2^n\left(2(n+1) - n\right)$

$B = 2^n(2n+2-n)$

$B = 2^n(n+2)$

Exercice n° 5

$2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

2 Calcul littéral

Prérequis

- Maîtriser les identités remarquables et les priorités de développements.
- Repérer ou mettre en évidence un facteur commun pour factoriser.
- Mettre en évidence une identité remarquable pour factoriser.
- Réduire des expressions au même dénominateur.

Développer des expressions

Recopie et complète les pointillés.

$A = 2(3x-1)^2 - (5x+3)(2-3x)$

$A = 2(9x^2 - 6x + 1) - (10x - 15x^2 + 6 - 9x)$

$A = 18x^2 - 12x + 2 - 10x + 15x^2 - 6 + 9x$ donc $A = 33x^2 - 13x - 4$

Exercice n° 6

$B = (6x - 4x^2 - 27 + 18x) + 5(4x^2 + 4x + 1)$
$B = 6x - 4x^2 - 27 + 18x + 20x^2 + 20x + 5$
$B = 16x^2 + 44x - 22$

Exercice n° 7

$C = 2(5x-1)^2 + 10x - 2$
$C = 2(5x-1)^2 + 2(5x-1)$
$C = (5x-1)\left(2(5x-1)+2\right)$
$C = (5x-1)(10x-2+2)$
$C = 10x(5x-1)$

$E = (4x-3)^2 - 25x^2$
$E = (4x-3)^2 - (5x)^2$
$E = ((4x-3)-5x)((4x-3)+5x)$
$E = (-x-3)(9x-3)$

Exercice n° 8

$$B = \frac{2x}{3x-1} - 5$$
$$B = \frac{2x}{3x-1} - 5 \times \frac{3x-1}{3x-1}$$
$$B = \frac{2x - 5 \times (3x-1)}{3x-1}$$
$$B = \frac{2x - 15x + 5)}{3x-1}$$
$$B = \frac{-13x+5}{3x-1}$$

$$C = \frac{4}{2x+6} - \frac{3}{x-5}$$
$$C = \frac{4}{2x+6} \times \frac{x-5}{x-5} - \frac{3}{x-5} \times \frac{2x+6}{2x+6}$$
$$C = \frac{4(x-5) - 3(2x+6)}{(x-5)(2x+6)}$$
$$C = \frac{4x - 20 - 6x - 18)}{2x^2 + 6x - 10x - 30}$$
$$C = \frac{-2x-38}{2x^2 - 4x - 30}$$
$$C = \frac{-x-19}{x^2 - 2x - 15}$$

3 Equations

Prérequis

- ✏ Savoir développer et factoriser une expression.
- ✏ Connaître et savoir utiliser les identités remarquables.
- ✏ Résolution d'une équation du premier degré et d'une équation produit nul.
- ✏ Equations du second degré.

Exercice n° 9

1. $-x = x + 16$

$-2x = 16$

$x = \dfrac{16}{-2} = -8$ donc $S = \{-8\}$

2. $(-x-4)(-x+7) = 0$

$-x-4 = 0$ ou $-x+7 = 0$

$x = -4$ ou $x = 7$ donc $S = \{-4; 7\}$

3. $9(-3x-1)(6x-36) = 0$

$-3x-1 = 0$ ou $6x-36 = 0$

$-3x = 1$ ou $6x = 36$

$x = -\dfrac{1}{3}$ ou $x = 6$ donc $S = \left\{-\dfrac{1}{3}; 6\right\}$

4. $\dfrac{-3x-1}{8-5x} = 0$

Valeur interdite : $8-5x = 0 \iff x = \dfrac{8}{5}$

$\dfrac{-3x-1}{8-5x} = 0 \iff -3x-1 = 0$ et $x \neq \dfrac{8}{5}$

$\dfrac{-3x-1}{8-5x} = 0 \iff x = -\dfrac{1}{3}$ et $x \neq \dfrac{8}{5}$

$S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

5. $\dfrac{5-8x}{x-2} = 3$

Valeur interdite : $x-2 = 0 \iff x = 2$

$\dfrac{5-8x}{x-2} - 3 \times \dfrac{x-2}{x-2} = 0$

$\dfrac{(5-8x) - 3 \times (x-2)}{x-2} = 0$

$\dfrac{11-11x}{x-2} = 0$

$\dfrac{11-11x}{x-2} = 0 \iff 11-11x = 0$ et $x \neq 2$

$\dfrac{11-11x}{x-2} = 0 \iff x = 1$ et $x \neq 2$

$S = \{1\}$

Exercice n° 10

1. $(5x-1)(x-9) - (x-9)(2x-1) = 0$

$(x-9)\left((5x-1) - (2x-1)\right) = 0$

$(x-9)(5x-1-2x+1) = 0$

$3x(x-9) = 0$

$3x = 0$ ou $x-9 = 0$

$x = 0$ ou $x = 9$ donc $S = \{0; 9\}$

2. $(x-1)(2x-7) = 4x^2 - 28x + 49$

$(x-1)(2x-7) = (2x-7)^2$

$(x-1)(2x-7) - (2x-7)^2 = 0$

$(2x-7)\left((x-1) - (2x-7)\right) = 0$

$(2x-7)(x-1-2x+7)=0$

$(2x-7)(-x+6)=0$

$2x-7=0$ ou $-x+6=0$

$x=\frac{7}{2}$ ou $x=6$ donc $S=\left\{\frac{7}{2};6\right\}$

3. $x+1=\dfrac{9}{x+1}$

Valeur interdite : $x+1=0 \iff x=-1$

$$\begin{aligned} x+1=\frac{9}{x+1} &\iff (x+1)^2=9 \text{ et } x\neq 1 \\ &\iff x+1=3 \text{ ou } x+1=-3 \text{ et } x\neq 1 \\ &\iff x=2 \text{ ou } x=-4 \text{ et } x\neq 1 \end{aligned}$$

$S=\{-4;2\}$

4. $\dfrac{3x-1}{x-5}=\dfrac{3x-4}{x}$

Valeurs interdites : $x-5=0 \iff x=5$

$x=0$

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x-5}=\frac{3x-4}{x} &\iff x(3x-1)=(x-5)(3x-4) \text{ et } x\neq 5 \text{ et } x\neq 0 \\ &\iff 3x^2-x=3x^2-4x-15x+20 \text{ et } x\neq 5 \text{ et } x\neq 0 \\ &\iff -x+19x=20 \text{ et } x\neq 5 \text{ et } x\neq 0 \\ &\iff x=\frac{20}{18}=\frac{10}{9} \text{ et } x\neq 5 \text{ et } x\neq 0 \end{aligned}$$

$S=\{\frac{10}{9}\}$

Exercice n° 11

1. $6x^2-15x-9=0$

On a $a=6$, $b=-15$ et $c=-9$

$\Delta=b^2-4ac=(-15)^2-4\times 6\times(-9)=441$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{15-\sqrt{441}}{12}$ et $x_2=\dfrac{15+\sqrt{441}}{12}$

$x_1=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=3$

$S=\left\{3;-\dfrac{1}{2}\right\}$

2. $\dfrac{1}{8}x^2+x+2=0$

On a $a=\dfrac{1}{8}$, $b=1$ et $c=2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times \frac{1}{8} \times 2 = 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle.

$x_0 = -\frac{b}{2a}$

$x_0 = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{8}}$

$x_0 = -4$

$S = \{-4\}$

3. $x^2 + x + 1 = 0$. On a $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

   $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

4 Etude de signes et inéquations

Prérequis

- ✏ Savoir développer et factoriser une expression.
- ✏ Règle des signes pour un produit ou un quotient.
- ✏ Étudier le signe d'une fonction affine.
- ✏ Inéquations du second degré.

Inéquation du premier degré

Exercice n° 12

1. $6x + 7 > 4x + 8$
   $6x - 4x > 8 - 7$
   $2x > 1$
   $x > \frac{1}{2}$
   $S = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

2. $x + 1 \geqslant 9x + 25$
   $x - 9x \geqslant 25 - 1$
   $-8x \geqslant 24$
   $x \leqslant \frac{24}{-8}$
   $x \leqslant -3$
   $S =]-\infty; -3]$

Signe d'un produit

Exercice n° 13

1. $(x - 8)(-1 - 10x) \leqslant 0$
   Signe de chaque facteur :

   $x - 8 > 0 \iff x > 8$

   $-1 - 10x > 0 \iff x < -\frac{1}{10}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{10}$		8		$+\infty$
signe de $x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x-10$		$+$	0	$-$		$-$	
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty; -\dfrac{1}{10}\right] \cup [8; +\infty[$

2. $(3x+2)^2 - (3x+2)(5x+1) \leqslant 0$
$(3x+2)\left((3x+2)-(5x+1)\right) \leqslant 0$
$(3x+2)(-2x+1) \leqslant 0$
Signe de chaque facteur :
$3x+2>0 \iff x > -\dfrac{2}{3}$ $\qquad -2x+1>0 \iff x < \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty; -\dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice n° 14

1. Puisque $x+y=20$, on a $y = 20-x$.

2. $P = xy = x(20-x)$
$P \geqslant 91 \iff x(20-x) \geqslant 91$
$\iff 20x - x^2 - 91 \geqslant 0$
Or $(7-x)(13-x) = 91 - 7x - 13x + x^2 = x^2 - 20x + 91$.
$P \geqslant 91 \iff -x^2 + 20x - 91 \geqslant 0$
$\iff x^2 - 20x + 91 \leqslant 0$
$\iff (7-x)(13-x) \leqslant 0$

3. On dresse le tableau de signes de l'expression $R(x) = (7-x)(13-x)$
$7-x>0 \iff x<7$
$13-x>0 \iff x<13$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		7		13		$+\infty$
signe de $7-x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $13-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in [7; 13]$ et $y \in [7; 13]$ avec $x+y=20$.

Signe d'un quotient

Exercice n° 15

1. $\dfrac{3}{2x-7} \leqslant 0$

Valeur interdite : $2x - 7 = 0 \iff x = \dfrac{7}{2}$

Le signe de $\dfrac{3}{2x-7}$ ne dépend que du signe de $2x - 7$.

$\dfrac{3}{2x-7}$ est négatif quand $2x - 7$ est négatif.

$2x - 7 < 0 \iff x < \dfrac{7}{2}$

$$S = \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$$

2. $5 + \dfrac{2}{x+3} \leqslant 0$

Valeur interdite : $x + 3 = 0 \iff x = -3$

$5 + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{5(x+3)+2}{x+3} = \dfrac{5x+17}{x+3}$

$5x + 17 > 0 \iff x > -\dfrac{17}{5}$ $\qquad$ $x + 3 > 0 \iff x > -3$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{17}{5}$		-3		$+\infty$
signe de $5x+17$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$S = \left[-\frac{17}{5}; -3\right[$$

3. $\dfrac{3}{2x-1} \geqslant \dfrac{2}{-3x+15}$

Valeurs interdites : $2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$

$$-3x+15=0 \iff x=5$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2x-1} \geqslant \frac{2}{-3x+15} &\iff \frac{3}{2x-1}-\frac{2}{-3x+15} \geqslant 0\\ &\iff \frac{3(-3x+15)}{(2x-1)(-3x+15)}-\frac{2(2x-1)}{(-3x+15)(2x-1)} \geqslant 0\\ &\iff \frac{3(-3x+15)-2(2x-1)}{(-3x+15)(2x-1)} \geqslant 0\\ &\iff \frac{-13x+47}{(-3x+15)(2x-1)} \geqslant 0\end{aligned}$$

$-13x+47>0 \iff x<\frac{47}{13}$

$-3x+15>0 \iff x<5$

$2x-1>0 \iff x>\frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{47}{13}$		5		$+\infty$
signe de $-13x+47$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $-3x+15$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe du quotient		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$S=\left]\frac{1}{2};\frac{47}{13}\right]\cup]5;+\infty[$

Signe d'un polynôme du second degré

Exercice n° 16

1. $2x^2-5x-42 \geqslant 0$

On a $a=2$, $b=-5$ et $c=-42$.

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-42)=361=19^2$

$\Delta>0$ donc il y a deux racines : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{5-19}{4}=-\frac{7}{2}$ et $x_2=\frac{5+19}{4}=6$

Comme $a=2>0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut et on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		6		$+\infty$
signe de $2x^2-5x-42$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty;\frac{7}{2}\right]\cup[6;+\infty[$

2. $\dfrac{x^2-2x-3}{2x+5} \leqslant 0$

Valeur interdite : $2x+5=0 \iff x=-\dfrac{5}{2}$

Signe de $2x+5$: $2x+5>0 \iff x>-\dfrac{5}{2}$

Signe de x^2-2x-3 : On a $a=1$, $b=-2$ et $c=-3$
$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-3)=16$
$\Delta>0$ donc il y a deux racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1=\dfrac{2-4}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{2+4}{2}=3$
Comme $a=2>0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		3		$+\infty$
signe de x^2-2x-3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe du quotient		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty;-\dfrac{5}{2}\right[\cup[-1;3]$

analyse

5 Fonction exponentielle

Prérequis

- Fonction exponentielle.
- Calcul avec des puissances.
- Calcul littéral.

Exercice n° 17

$A(x) = e^{2x-1}e^{-x+1}$
$A(x) = e^{(2x-1)+(-x+1)}$
$A(x) = e^{x}$

$B(x) = \dfrac{e^{2-x}}{e^{1-2x}}$
$B(x) = e^{(2-x)-(1-2x)}$
$B(x) = e^{x+1}$

$C(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}}$
$C(x) = 1 + \dfrac{e^{-x}}{e^{x}}$
$C(x) = 1 + e^{-2x}$

$D(x) = \dfrac{e^{x}e^{y}}{e^{x-y}}$
$D(x) = e^{(x+y)-(x-y)}$
$D(x) = e^{2y}$

$E(x) = \dfrac{e^{2x+3}}{e^{-x}}$
$E(x) = e^{(2x+3)-(-x)}$
$E(x) = e^{3x+3}$

Exercice n° 18

1. $A = 10e^{x} - 5xe^{x}$
$A = 5e^{x}(2-x)$

2. $B = e^{2x} - 4e^{x}$
$B = e^{x}\left(e^{x}-4\right)$

3. $C = 9e^{2x} - 6e^{x} + 1$
$C = (3e^{x})^2 - 2 \times 3e^{x} + 1$
$C = (3e^{x}-1)^2$

4. $D = e^{2x} - 16$
$D = (e^{x})^2 - 4^2$
$D = (e^{x}-4)(e^{x}+4)$

Exercice n° 19

1. $e^{-3x} = e^{x+1} \iff -3x = x+1 \iff -4x = 1 \iff x = -\dfrac{1}{4}$

$S = \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$

2. $e^{2x} \leqslant 1 \iff 2x \leqslant 0 \iff x \leqslant 0$

$S =]-\infty; 0]$

3. $e^{-2x} = 0$

$S = \emptyset$ car la fonction exponentielle ne s'annule pas.

4. $e^{x} > e \iff x > 1$

$S =]1; +\infty[$

5. $e^{x^2} = e^{-5x+6} \iff x^2 = -5x+6 \iff x^2+5x-6 = 0$

On a $a = 1$, $b = 5$ et $c = -6$
$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{5-7}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{5+7}{2} = 6$
$S = \{-1; 6\}$

6. $e^{-x} \leqslant e^{x} \iff -x \leqslant x \iff 2x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$

$S = [0; +\infty[$

6 Dérivation et fonctions dérivées

Prérequis

- ✏ Connaître la dérivée des fonctions de références, en particulier celles définies par $mx+p$, x^n, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ et e^x.
- ✏ Connaître les formules de dérivation d'un produit, d'un quotient.
- ✏ Connaître la formule de dérivation d'une fonction composée définie par $g(x) = f(mx+p)$.
- ✏ Connaître le calcul littéral et en particulier la factorisation.
- ✏ Enfin, toujours garder en tête que l'on calcule une fonction dérivée pour obtenir son signe ainsi que ses racines. Il faudra donc le plus souvent chercher à factoriser le résultat.
  Dans un calcul de dérivation, on ne développe qu'à une seule condition : La factorisation n'est pas possible !

Exercice n° 20

1. La fonction f définie par $f(x) = x^3$ est-elle dérivable en 2 ?
   $f(2) = 2^3 = 8$ et $f(2+h) = (2+h)^3 = 8 + 6h + 6h^2 + h^3$

   $$\tau(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{6h+6h^2+h^3}{h} = 6 + 6h + h^2$$

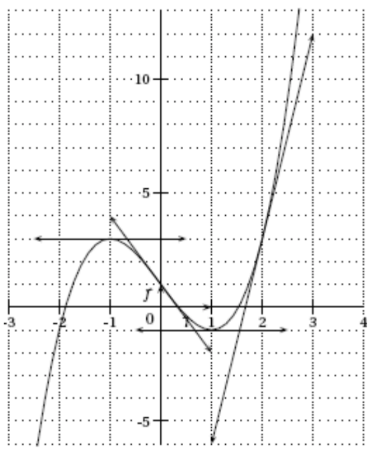
   Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers 6.
   La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est un réel fini donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 6$.
2. La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? $f(0) = \sqrt{0} = 0$ et $f(0+h) = \sqrt{0+h} = \sqrt{h}$

   $$\tau(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\left(\sqrt{h}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

   Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers $+\infty$.
   La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 n'est pas fini donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice n° 21

1. Déterminer graphiquement :
   a. $f(0) = 1$; $f(-1) = 3$ et $f(2) = 3$.
   b. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est -3 ;
      Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1 est 0 ;
      Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est 9.
   c. L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 est $y = 3$
   d. L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0 $y = -3x + 1$



2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1; 26)$.
   Le coefficient directeur de la droite T est $m = \frac{26-(-1)}{1-(-2)} = 9$.
   L'équation de cette droite est de la forme $y = 9x + p$.
   On sait que cette droite passe par le point A donc on doit avoir $y_A = 9x_A + p$.
   Soit $26 = 9 \times 1 + p$ donc $p = 17$.
   L'équation réduite de T est $y = 9x + 17$.

Exercice n° 22

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur [-3 ;0] ;
- $f(0) = -2$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est horizontale ;

- $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie ;
- $f(3) = 9$.

Exercice n° 23

1. $f(x) = -x^2$, pour $a = 2$.
$f(2) = -2^2 = -4$ et $f(2+h) = -(2+h)^2 = -4 - 4h - h^2$

$$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-4h - h^2}{h} = -4 - h^2$$

Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers -4.
La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est un réel fini donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = -4$.

2. $f(x) = 2x - 7$, pout tout a dans $\mathbb{R}$. $f(a) = 2a - 7$ et $f(a+h) = 2(a+h) - 7 = 2a - 7 + 2h$

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers 2.
La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est un réel fini donc f est dérivable en
Ra et $f'(a) = 2$.

3. $f(x) = \frac{1}{x}$, pour $a = 1$. $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ et $f(1+h) = \frac{1}{1+h}$

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{1 - (1+h)}{h(1+h)} = \frac{-1}{1+h}$$

Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers -1.
La limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0 est un réel fini donc f est dérivable en 2 et $f'(1) = -1$.

Exercice n° 24

1. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 7$
$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 5$
$f'(x) = 6x^2 - 12x + 5$

2. $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+1}$

On pose $u(x) = 4x + 1$ donc $u'(x) = 4$
$v(x) = 2x^2 + 1$ donc $v'(x) = 4x + 1$

$$f'(x) = \frac{4(2x^2+1) - 4x(4x+1)}{(2x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{8x^2 + 4 - 16x^2 - 4x}{(2x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-8x^2 - 4x + 4}{(2x^2+1)^2}$$

3. $f(x) = x^2 e^x$

On pose $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x$
$f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$

4. $f(x) = xe^{-x}$
On pose $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$
$v(x) = e^{-x}$ donc $v'(x) = -e^{-x}$
$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right)$
$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$

5. $f(x) = e^{3x+7}$
On pose $u(x) = 3x + 7$ donc $u'(x) = 3$
$f'(x) = 3e^{3x+7}$

7 Etude de fonctions

Prérequis

- ✏ Etre capable de déterminer la dérivée d'une fonction ainsi que son signe.
- ✏ Etre capable de déterminer l'équation réduite d'une tangente en un point.
- ✏ Connaître le calcul littéral et en particulier la factorisation.

Exercice n° 25

1. Calcul de la fonction dérivée.
   f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

2. Etude du signe de la fonction dérivée.
   f' est une fonction du second degré avec $a = 6$, $b = -6$ et $c = -36$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900 = 30^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a 2 racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
   Soit $x_1 = \dfrac{6-30}{12} = -2$ et $x_2 = \dfrac{6+30}{12} = 3$
   Ici $a = 6 > 0$ donc les branches de la parboles sont tournées vers le haut.
3. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\nearrow$	74	$\searrow$	-51	$\nearrow$	

Exercice n° 26

D'après un exercice du *Livre scolaire*

1. M est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x.
   Donc $y_M = f(x) = (x+1)e^{-\frac{3}{2}x}$ et $M\left(x; (x+1)e^{-\frac{3}{2}x}\right)$
   On en déduit que $N(x;0)$ et $P\left(0; (x+1)e^{-\frac{3}{2}x}\right)$.

2. L'aire du rectangle $ONMP$ est égale à $ON \times OP$, avec $ON = x$ et $OM = (x+1)e^{-\frac{3}{2}x}$.
   On a donc $\mathscr{A}(x) = x \times (x+1)e^{-\frac{3}{2}x} = (x^2+x)e^{-\frac{3}{2}x}$

3. • Calcul de la fonction dérivée
   On pose $u(x) = x^2 + x$ donc $u'(x) = 2x + 1$
   $v(x) = e^{-\frac{3}{2}x}$ donc $v'(x) = -\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}$
   $$\begin{aligned}\mathscr{A}'(x) &= (2x+1)e^{-\frac{3}{2}x} + (x^2+x) \times \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}\right)\\ &= e^{-\frac{3}{2}x}\left(2x+1-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right)\\ &= e^{-\frac{3}{2}x}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)\end{aligned}$$
   • Signe de la dérivée.
   ☞ Pout tout $x \in [0;3]$, $e^{-\frac{3}{2}x} > 0$
   ☞ $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) \times 1 = \dfrac{25}{4}$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
   $$\text{Soit } x_1 = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{-3} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{-3} = -\frac{2}{3}$$
   $a = -\dfrac{3}{2} < 0$ donc les branches de la parabole sont tournées vers le bas.
   • Tableau de variations $\mathscr{A}(0) = 0$; $\mathscr{A}(1) = 2e^{-\frac{3}{2}}$ et $\mathscr{A}(3) = 12e^{-\frac{9}{2}}$.

x	0		1		3
signe de $\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de $\mathscr{A}$	0	↗	$2e^{-\frac{3}{2}}$	↘	$12e^{-\frac{9}{2}}$

4. L'aire du rectangle $ONMP$ est maximale pour $x = 1$.

Exercice n° 27

Partie A

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. Méthode : on développe l'expression de droite et on identifie les coefficients
$(x-1)\left(ax^2+bx+c\right) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.
Or $P(x) = x^3-3x^2+2$ donc $a = 1$, $b-a = -3$, $c-b = 0$ et $c = -2$.
C'est-à-dire $a = 1$, $b = -2$ et $c = -2$. Ainsi $P(x) = (x-1)\left(x^2-2x-2\right)$

2. Étudier le signe de $P(x)$. $P(x) = (x-1)\left(x^2-2x-2\right)$.
On étudie le signe de x^2-2x-2 : $\Delta = (-2)^2-4\times 1\times(-2) = 12$
$x_1 = 1+\sqrt{3}$ et $x_2 = 1-\sqrt{3}$ et le trinôme est positif à l'extérieur de ces racines.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1-\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x^2-2x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

1. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$u(x) = x^3-3x+2 \Longrightarrow u'(x) = 3x^2-3$ et $v(x) = x-2 \Longrightarrow v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{\left(3x^2-3\right)(x-2)-\left(x^3-3x+2\right)(1)}{(x-2)^2} = \frac{3x^3-6x^2-3x+6-x^3+3x-2}{(x-2)^2} = \frac{2x^3-6x^2+4}{(x-2)^2}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{2\left(x^3-3x^2+2\right)}{(x-2)^2} = \dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$

2. $(x-2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $P(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variation de f		↘	$9-6\sqrt{3}$	↗	0	↘	‖	↘	$9+6\sqrt{3}$	↗	

3. Il faut faire un tableau de valeurs et placer les points correspondants sur la graphique.

4. On cherche les valeurs de x_0 vérifiant $f'(x) = 0$.
Donc quand $P(x) = 0$. Il y a 3 valeurs possibles pour x_0 : $1-\sqrt{3}$, 1 et $1+\sqrt{3}$.

5. Une équation de la tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 3$.
   $f(3) = 20$ et $f'(3) = 4$ donc $y = 4(x-3) + 20$, bref $y = 4x + 8$.
6. Même méthode qu'à la première question :
   $$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + \frac{d}{x-2} &= \frac{\left(x^2+2x+1\right)(x-2)+d}{x-2} \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2 + d}{x-2} \\ &= \frac{x^3 - 3x - 2 + d}{x-2} \end{aligned}$$
   Or $x^2 + 2x + 1 + \frac{d}{x-2} = f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x-2}$ donc $-2 + d = 2$, d'où $d = 4$.
   Ainsi $f(x) = x^2 + 2x + 1 + \frac{4}{x-2}$.
7. On appelle g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et P sa courbe représentative.
   Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de P. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de P, il faut étudier le signe de $f(x) - \left(x^2 + 2x + 1\right)$.
   $f(x) - \left(x^2 + 2x + 1\right) = \frac{4}{x-2}$, donc si $x > 2$, la différence est positive (donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{P}$) et si $x < 2$, la différence est négative (donc $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathscr{P}$).

8 Suites

Prérequis
- ✏ Sens de variation d'une suite.
- ✏ Suites arithmétiques, suites géométriques.
- ✏ Somme des termes.
- ✏ Algorithme.

Exercice n° 28

1. L'algorithme 1 affiche 6 valeurs.
   L'algorithme 2 affiche 5 valeurs.
   L'algorithme 3 affiche 1 valeur.
   remarque : C'est un à priori car, si on teste cet algorithme, ou si on étudie la suite définie, on s'aperçoit que l'algorithme 3 ne s'arrête jamais.
   L'algorithme 4 affiche 1 valeur.

2. Faire tourner, à la main, ces 4 algorithmes.
3. L'algorithme 1 affiche les 6 premiers termes de la suite définie par $u_n = 2n - 1$.
   L'algorithme 2 affiche les termes de rang 2 à 6 de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$.
   L'algorithme 3 affiche le premier terme inférieur à 20 de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$.
   L'algorithme 4 affiche le premier terme supérieur à 20 de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$.
4. Dire s'il s'agit de suites définies par une formule explicite ou par une relation de récurrence. La première suite est définie par une formule explicite, les 3 autres sont définies par une relation de récurrence.

Exercice n° 29

1. $u_n = u_0 + nr$ donc $u_n = 8 + 3n$
2. $u_{12} = 8 + 3 \times 12 = 44$

3. $S = 8 + (8+3) + (8+2\times 3) + (8+3\times 3) + \cdots + (8+12\times 3)$
$S = 13\times 8 + 3(0+1+2+\cdots+12)$
$S = 104 + 3\times \dfrac{12\times 13}{2}$
$S = 104 + 234 = 338$

Exercice n° 30

1. $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 3\times 2^n$
2. $u_9 = 3\times 2^9 = 1536$
3. $S = 3 + 3\times 2 + 3\times 2^2 + 3\times 2^3 + \cdots + 3\times 2^9$
$S = 3\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9\right)$
$S = 3\times \dfrac{1-2^{10}}{1-2}$
$S = 3\times \dfrac{-1023}{-1} = 3069$

Exercice n° 31

1. $d_2 = 50\times\left(1-\dfrac{1}{100}\right) = 49,5$
$d_3 = 49,5\times 0,99 = 49,005$
2. $d_{n+1} = 0,99 d_n$
On en déduit que le suite (d_n) est géométrique de raison $q = 0,99$ et de premier terme $d_1 = 50$.
3. $d_n = d_1\times q^{n-1}$ soit $d_n = 50\times 0,99^{n-1}$.
4. $L_n = 50 + 50\times 0,99 + 50\times 0,99^2 + \cdots + 50\times 0,99^{n-1}$
$L_n = 50\left(1 + 0,99 + 0,99^2 + \cdots + 0,99^{n-1}\right)$
$L_n = 50\times\dfrac{1-0,99^n}{1-0,99}$
$L_n = 50\times\dfrac{1-0,99^n}{0,01}$
$L_n = 5\ 000\,(1-0,99^n)$.
5. Quand n tend vers $+\infty$, $0,99^n$ tend vers 0. donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 5\ 000$.
On en déduit que le globe trotteur ne peut pas gagner son pari.

Exercice n° 32

D'après Manuel *Techmaths Editions Nathan 2019*

Partie A

1. En 2019, on pouvait pêcher 600 tonnes de cabillaud.
En 2020, on peut pêcher 570 tonnes.
Et en 2021, ce sera 540 tonnes.
2. On a donc $u_0 = 600$ et $u_1 = 570$.
3. D'une année à l'autre, le quota de cabillauds pouvant être pêché diminue de 30 tonnes donc $u_{n+1} = u_n - 30$
On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -30$ et de premier terme $u_0 = 600$.
4. $u_{10} = u_0 - 30\times 10 = 300$.
Cela signifie qu'en 2029, le quota de pêche sera de 300 tonnes.
5. Utilisation du tableur

	A	B	C
1	n	u(n)	total
2	0	600	600
3	1	570	1170
4	2	540	1710
5	3	510	2220
6	4	480	2700
7	5	450	3150
8	6	420	3570
9	7	390	3960
10	8	360	4320
11	9	330	4650
12	10	300	4950
13	11	270	5220
14	12	240	5460

a. `=B2-30`

b. `=C2+B3`

c. Recopier et compléter le tableau, à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur.

d. La quantité totale de cabillaud, en tonnes, pêchée entre 2019 et 2029 est de 4 950 tonnes.

e. Le stock de cabillaud étant de 5 000 tonnes, il est évident qu'en 2029, le stock sera totalement épuisé.

Partie B

1. D'une année à l'autre le stock augmente de 12%, il est donc multiplié par $1 + \dfrac{12}{100} = 1,12$ mais il est aussi diminué de 500 tonnes.
$v_1 = v_0 \times 1,12 - 500 = 5\ 000 \times 1,12 - 500 = 5\ 100.$
$v_2 = v_1 \times 1,12 - 500 = 5\ 100 \times 1,12 - 500 = 5212.$

2. $v_3 = v_2 \times 1,12 - 500 = 627,2 \times 1,12 - 500 = 5\ 337,44.$

3. On a $v_{n+1} = 1,12v_n - 500$.

a. L'algorithme affiche la valeur de v_9.
$v_8 = v_7 \times 1,12 - 500 = 6\ 009 \times 1,12 - 500 = 6\ 230,08$
$v_9 = v_8 \times 1,12 - 500 = 6\ 230,08 \times 1,12 - 500 = 6\ 477,6896$

b. Cela signifie que, dans ce modèle, le stock de cabillaud en 2028 sera de presque 6 500 tonnes. Le stock augmente.

Exercice n° 33

Si vous acceptez mon offre, je vous donne $2\ 500 \times 14 = 35\ 000$ €.
Mais vous me donnerez chaque une somme qui correspond aux termes de la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_1 = 3$ (centimes).
Si on appelle u_n la somme donnée le $n^{\text{ième}}$ jour, on a $u_n = 3 \times 3^{n-1}$.
Donc le $14^{\text{ième}}$ jour vous me devrez, $u_{14} = 3 \times 3^{13} = 4\ 782\ 969$ centimes soit environ 47 830€.
On pourrait bien sûr calculer la somme totale que vous m'auriez donné.
Mais est-ce vraiment utile ?
Vous n'êtes pas si fou !

Probabilités

Prérequis

- ✏ Probabilités conditionnelles.
- ✏ Variables aléatoires, espérance et écart-type.

Exercice n° 34

D'après un exercice du manuel *Declic* éditions Bordas 2019

On donne la répartition des élèves d'un lycée.

	Seconde (S)	Première (P)	Terminale (T)	Total
Filles (F)	190	220	190	600
Garçons (G)	210	200	170	580
Total	400	420	360	1 180

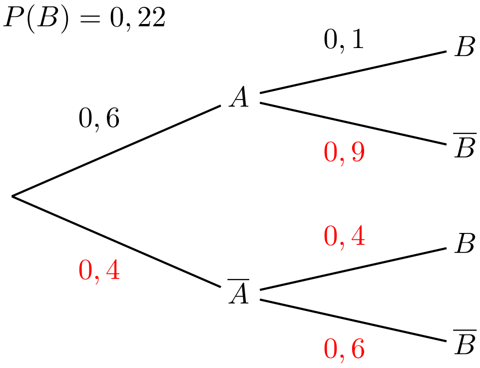
On choisit un élève au hasard.

- La probabilité que l'élève choisi est un élève de seconde est $\dfrac{400}{1180} = \dfrac{20}{59}$
- La probabilité que l'élève choisi est une fille de première est $\dfrac{220}{1180} = \dfrac{11}{59}$
- La probabilité que l'élève choisi est une fille sachant que c'est un élève de seconde est $\dfrac{190}{400} = \dfrac{19}{40}$
- La probabilité que l'élève choisi est un élève de terminale sachant que c'est un garçon est $\dfrac{170}{580} = \dfrac{17}{58}$

Exercice n° 35

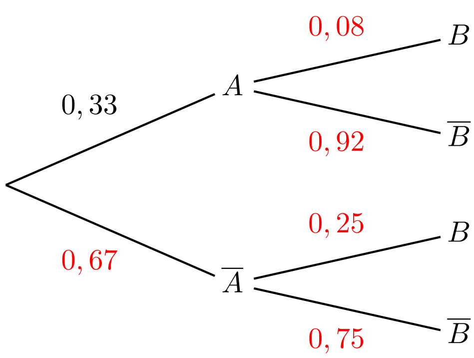
D'après un exercice du manuel *Declic* éditions Bordas 2019

1. $P(B) = 0,22$



$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,4$
$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 0,9$
On sait que
$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(A) \times P_{\overline{A}}(B) = 0,22$
On obtient $0,6 \times 0,1 + 0,4 \times P_{\overline{A}}(B) = 0,22$
donc $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{0,22 - 0,06}{0,4} = 0,4$
$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 0,6$

2. $P\left(\overline{B}\right) = 0,8061$ et $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,1675$

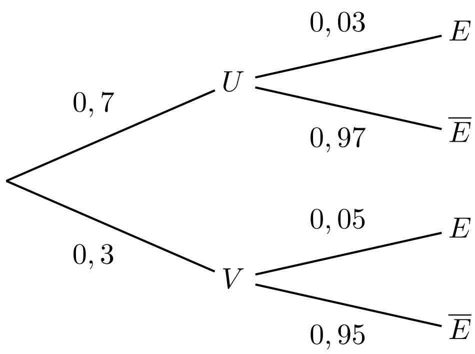


$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,67$
On sait que
$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \times P_{\overline{A}}(B) = 0,1675$
Soit $0,67 \times P_{\overline{A}}(B) = 0,1675$
donc $P_{\overline{A}}(B) = 0,1675 = \dfrac{0,1675}{0,67} = 0,25$
$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0,25 = 0,75$
On sait que
$P(\overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B}) + P(A) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,8061$
On obtient $0,33 \times P_A(\overline{B}) + 0,67 \times 0,75 = 0,8061$
donc $P_A(\overline{B}) = \dfrac{0,8061 - 0,5025}{0,33} = 0,92$
$P_A(B) = 1 - P_A(\overline{B}) = 0,08$

Exercice nº 36

D'après un exercice du manuel *Indice* éditions Bordas 2019

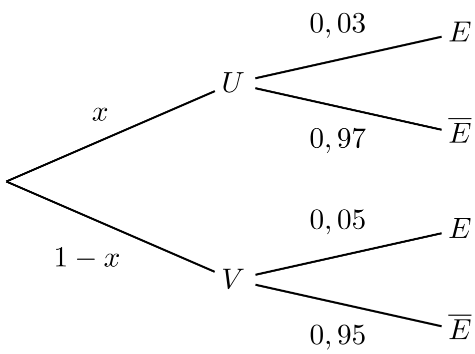
1. On représente la situation par un arbre pondéré.



a. $P(E) = P(U) \times P_U(E) + P(V) \times p_V(E) = 0,7 \times 0,03 + 0,3 \times 0,05 = 0,036$

b. $P_E(U) = \dfrac{P(E \cap U)}{P(E)} = \dfrac{0,7 \times 0,03}{0,036} = \dfrac{7}{12} \approx 0,58$

2. On représente la situation par un arbre pondéré.



On cherche x pour que $P_E(U) = 0,3$

Or $P_E(U) = \dfrac{P(U \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,03x}{0,03x + 0,05(1-x)}$

On doit donc résoudre l'équation $\dfrac{0,03x}{-0,02x + 0,05} = 0,3$

Soit $0,03x = 0,3(-0,02x + 0,05)$

$0,036x = 0,015$ donc $x = \dfrac{0,015}{0,036} = \dfrac{5}{12}$